確認用メモ

金沢電子出版 開発部

平成 23 年 11 月 17 日

1　一様な重力場で投げ上げられた物体の運動

1.1　入力

種類	記号	単位
初速	v_0	[m/s]
仰角	θ_0	[°]
投射時の高さ	h	[m]
空気抵抗	k	[1/m]

1.2　出力

表示するグラフ

- 空気抵抗がない場合の軌跡 (横軸水平、縦軸鉛直)
- 空気抵抗が入力値 k の場合の軌跡

横軸の範囲はだいたい

$$0 \leqq x \leqq 1.2 \times \text{空気抵抗がない場合の到達点} \tag{1}$$

くらい

1.3 使用する数式

一様な重力場 (重力加速度 $g = 9.8$ [m/s^2]) 中で投げ上げられた物体の運動方程式

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{2}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \ , \quad \frac{dy}{dt} = v_y \tag{4}$$

(v_x, v_y は物体の水平方向、鉛直方向の速度。k は空気抵抗の比例定数を物体の質量で割った量。)

この方程式を 4 次の Runge-Kutta 法で解き、速度と位置を求める。

時間の刻み

$\varepsilon = 0.01$ 程度にとって

$$\Delta t = \frac{\varepsilon v_0}{g} \tag{5}$$

を時間の刻みにとる。

解

初期条件:

$$(v_x)_0 = v_0 \cos\theta_0,\ (v_y)_0 = v_0 \sin\theta_0 \tag{6}$$

$$(x)_0 = 0,\ (y)_0 = h \tag{7}$$

として $n \geqq 1$ 以降をルンゲ・クッタ法で解く。

$$(v_x)_{n+1} = (v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{6}\left(A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_4\right) \tag{8}$$

$$(v_y)_{n+1} = (v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{6}\left(B_1 + 2B_2 + 2B_3 + B_4\right) \tag{9}$$

$$(x)_{n+1} = (x)_n + (v_x)_n \mathit{\Delta} t + (A_1 + A_2 + A_3)(\mathit{\Delta} t)^2 \tag{10}$$

$$(y)_{n+1} = (y)_n + (v_y)_n \mathit{\Delta} t + (B_1 + B_2 + B_3)(\mathit{\Delta} t)^2 \tag{11}$$

右辺の詳細は以下の通り:

$$A_1 = -k(v_x)_n \sqrt{\left\{(v_x)_n\right\}^2 + \left\{(v_y)_n\right\}^2} \tag{12}$$

$$A_2 = -k\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_1\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_1\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_1\right\}^2} \tag{13}$$

$$A_3 = -k\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_2\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_2\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_2\right\}^2} \tag{14}$$

$$A_4 = -k\left\{(v_x)_n + \mathit{\Delta} t\ A_3\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \mathit{\Delta} t\ A_3\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \mathit{\Delta} t\ B_3\right\}^2} \tag{15}$$

$$B_1 = -g - k(v_y)_n \sqrt{\left\{(v_x)_n\right\}^2 + \left\{(v_y)_n\right\}^2} \tag{16}$$

$$B_2 = -g - k\left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_1\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_1\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_1\right\}^2} \tag{17}$$

$$B_3 = -g - k\left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_2\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}A_2\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \frac{\mathit{\Delta} t}{2}B_2\right\}^2} \tag{18}$$

$$B_4 = -g - k\left\{(v_y)_n + \mathit{\Delta} t\ B_3\right\}\sqrt{\left\{(v_x)_n + \mathit{\Delta} t\ A_3\right\}^2 + \left\{(v_y)_n + \mathit{\Delta} t\ B_3\right\}^2} \tag{19}$$

2　単振動の合成：うなり

2.1　入力

種類	記号	単位
周波数の比	f_2/f_1	

2.2　出力

表示するグラフ

- 周波数 f_1 の正弦波 (横軸時間、表示範囲は波長 15 個分)
- 周波数 f_2 の正弦波
- 上記 2 つの合成波

2.3　使用する数式

周波数 f_1，f_2 の正弦波の振動

$$y_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) \tag{20}$$
$$y_2(t) = \sin(2\pi f_2 t) \tag{21}$$

およびその合成

$$y_3(t) = 2\sin\left(2\pi\frac{f_1 - f_2}{2}t\right)\sin\left(2\pi\frac{f_1 + f_2}{2}t\right) \tag{22}$$

を使用。入力値を、周波数の比

$$\xi = f_2/f_1$$

と置き、変数 t のスケールを適当にとる。表示するグラフは以下の 3 つ。

$$y_1(t) = \sin(2\pi t) \tag{23}$$
$$y_2(t) = \sin(2\pi\xi t) \tag{24}$$
$$y_3(t) = 2\sin\left(2\pi\frac{1-\xi}{2}t\right)\sin\left(2\pi\frac{1+\xi}{2}t\right) \tag{25}$$
$$0 \leqq t \leqq 15 \tag{26}$$

3 減衰振動

3.1 入力値

種類	記号	単位
錘の質量	m	[kg]
ばね定数	k	[N/m]
抵抗係数	μ	[N/(m/s)]

3.2 出力

表示するグラフ

- 錘の変位 (横軸時間)

グラフの横軸の範囲は

- $1/\tau \leqq \omega_0$ のとき $0 \leqq t \leqq 5\tau$ くらい
- $1/\tau > \omega_0$ のとき $0 \leqq t \leqq 5\tau/(1-\tilde{\Omega}\tau)$ くらい

(文字の説明は次ページ)

3.3 使用する数式

錘の質量 m、ばね定数 k、抵抗係数 $\mu\ (\neq 0)$ としたときの錘の振幅 $x(t)$ に関する運動方程式

$$m\ddot{x}(t) + \mu\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{27}$$

を、初期条件

$$x(t) = 1\ ,\quad \dot{x}(0) = 0 \tag{28}$$

で解く。以降変数を

$$\tau = \frac{2m}{\mu}\ ,\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{29}$$

と置く。$1/\tau = \omega_0$ の場合

$$x(t) = e^{-1/\tau} \tag{30}$$

$1/\tau < \omega_0$ の場合

$$x(t) = \sqrt{1/(\Omega\tau)^2 + 1}\ e^{-t/\tau}\sin(\Omega t + \delta) \tag{31}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}\ ,\quad \tan\delta = \Omega\tau \tag{32}$$

$1/\tau > \omega_0$ の場合は

$$x(t) = \sqrt{1/(\tilde{\Omega}\tau)^2 - 1}\ e^{-t/\tau}\sinh(\tilde{\Omega}t + \tilde{\delta}) \tag{33}$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{1/\tau^2 - \omega_0^2}\ ,\quad \tanh\tilde{\delta} = \tilde{\Omega}\tau \tag{34}$$

4　定在波

4.1　入力値

種類	記号	単位
振動の腹の数	n	

4.2　出力

表示するグラフ

- 正の方向に進む波 (横軸位置座標)
- 負の方向に進む波
- 合成波

グラフの横軸の範囲は、指定された定在波の腹の数が表示される範囲。

4.3　使用する数式

反平行で大きさが同じの波数ベクトルを持つ、振幅が等しい 2 つの波

$$\phi_1(x,t) = \sin(2\pi t - n\pi x/L) \tag{35}$$

$$\phi_2(x,t) = \sin(2\pi t + n\pi x/L + \pi) \tag{36}$$

とその合成:

$$\phi(x,t) = 2\sin(n\pi x/L)\cos(2\pi t) \tag{37}$$

(ω は角振動数、$2L/n$ は波長で、L はグラフの可視領域の幅)

グラフは位相が最初を入れて 5 回合うまで描画を繰り返すので、t の範囲は

$$0 \leqq t \leqq 4$$

となる。

(注) x, t の 2 変数関数なので、Excel では t を固定している。

5　摩擦が作用する床の上の単振動

5.1　入力値

種類	記号	単位
初期の変位	x_0	[m]
初速度	v_0	[m/s]
錘の質量	m	[kg]
ばね定数	k	[N/m]
最大静止摩擦係数	μ_0	
動摩擦係数	μ'	

5.2　出力

表示するグラフ

- 錘の変位 (横軸時間)

5.3　使用する数式

方程式

物体の変位 $x(t)$ の運動方程式は、数値計算上の小さな値 ε に対して

$$|\dot{x}| < \varepsilon \text{ かつ } |x| < \mu_0 mg/k \text{ のとき静止} \tag{38}$$
$$\dot{x} \geqq 0 \text{ のとき } \ddot{x} = -(k/m)x - \mu' g \tag{39}$$
$$\dot{x} < 0 \text{ のとき } \ddot{x} = -(k/m)x + \mu' g \tag{40}$$

(m:質量、g:重力加速度、k:ばね定数、μ_0:最大静止摩擦係数、μ':動摩擦係数)

解

文字を

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0 mg}{k}\ ,\quad \lambda' = \frac{\mu' mg}{k}\ ,\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

のように置いて、

- $|\dot{x}| < \varepsilon$, $|x| < \lambda_0$ のとき静止
- $\dot{x} \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= -\lambda' + \{(x(t_0) + \lambda')\cos(\omega t_0) - (\dot{x}(t_0)/\omega)\sin(\omega t_0)\}\cos(\omega t) \\ &\qquad + \{(x(t_0) + \lambda')\sin(\omega t_0) + (\dot{x}(t_0)/\omega)\cos(\omega t_0)\}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{41}$$
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega\{(x(t_0) + \lambda')\cos(\omega t_0) - (\dot{x}(t_0)/\omega)\sin(\omega t_0)\}\sin(\omega t) \\ &\qquad + \omega\{(x(t_0) + \lambda')\sin(\omega t_0) + (\dot{x}(t_0)/\omega)\cos(\omega t_0)\}\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{42}$$

- $\dot{x} < 0$ のとき

$$\begin{aligned} x(t) &= +\lambda' + \{(x(t_0) - \lambda')\cos(\omega t_0) - (\dot{x}(t_0)/\omega)\sin(\omega t_0)\}\cos(\omega t) \\ &\qquad + \{(x(t_0) - \lambda')\sin(\omega t_0) + (\dot{x}(t_0)/\omega)\cos(\omega t_0)\}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{43}$$
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega\{(x(t_0) - \lambda')\cos(\omega t_0) - (\dot{x}(t_0)/\omega)\sin(\omega t_0)\}\sin(\omega t) \\ &\qquad + \omega\{(x(t_0) - \lambda')\sin(\omega t_0) + (\dot{x}(t_0)/\omega)\cos(\omega t_0)\}\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{44}$$

これを t の増加ごとに逐次代入していく。